И. Н. КАВУН
Н. С. ПОПОВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

МОСКВА · 1936 · ЛЕНИНГРАД

И. Н. КАВУН и Н. С. ПОПОВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ И СТУДЕНТОВ ПЕДТЕХНИКУМОВ

Утверждено Наркомпросом РСФСР

Издание 2

МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Эта книга заключает в себе сравнительно небольшую по объему общую часть и обширную специальную часть — методику преподавания арифметики в начальной школе по годам обучения.

Обе эти части составляют единое целое: основные принципиальные установки, данные в начале книги, раскрываются и конкретизируются в последующих главах. Поэтому, желая успешно преподавать арифметику в одном из классов начальной школы, учитель должен ознакомиться со всеми разделами книги.

Вопрос о задачах не затрагивается в общей части — он изложен в специальной части по годам обучения. Тем более важно, чтобы учитель ознакомился не с одной какой-нибудь частностью в развитии этого вопроса, но со всем материалом в целом.

Производственные планы для каждого года обучения, а также образцы рабочих планов и примерные разработки уроков, будут выпущены дополнительно, в виде особого приложения.

Настоящая книга предназначается для учителей начальной школы и для учащихся педтехникумов, но может быть полезна и для студента педвуза, так как построена на достаточно солидном научном фундаменте.

Части этой книги „Общая часть“, „Третий год обучения“ и „Четвертый год обучения“ составлены И. Н. Кавуном.

Разделы этих частей: „Организация работы“, „Учет работы“, „Измерение времени и решение задач на время“, „Устные вычисления“ (340–342), „Сложение и вычитание десятичных дробей“ — составлены Н. С. Поповой. Весь остальной материал книги составлен Н. С. Поповой.

Цена 3 р. 60 к. Переплет 50 к.

Отв. редактор *И. П. Иванов*. Техн. ред. *Т. В. Иванова*. Корректор *В. А. Острогский*.
Следил за переизданием технич. редактор *П. И. Берлов*.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДИКЕ АРИФМЕТИКИ.

ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ МЕТОДИКИ АРИФМЕТИКИ.

Определение методики арифметики. Каждый учитель арифметики обязан знать свой предмет, как научную дисциплину: качество знаний учителя непременно скажется на качестве знаний его ученика. Однако этого еще недостаточно: можно знать предмет и не уметь его преподавать, особенно детям. Поэтому учитель должен не только знать арифметику, но и владеть такими средствами ее преподавания, чтобы ученики интересовались этим предметом, понимали, твердо усваивали и умели применять его в жизненной практике, в технике и в других областях знаний. *Изучение этих средств и составляет задачу методики арифметики.*

Содержание методики арифметики. Методика арифметики отвечает на следующие вопросы, относящиеся к изучению арифметики: *зачем* учить, *чему* учить, *как* учить, *как* организовать обучение.

Отвечая на первый вопрос, необходимо исследовать цель обучения арифметике, так как целью обуславливается и система изучаемых понятий и метод обучения.

Отвечая на второй вопрос, следует произвести отбор тех понятий, которые подлежат изучению; а затем сделать краткое их обоснование, которое могло бы служить исходной точкой при выработке методов обучения.

Изложение методов обучения арифметике послужит ответом на третий вопрос — как учить.

Если к перечисленным здесь задачам присоединить организацию обучения арифметике, то получится полный круг основных вопросов, составляющих содержание методики арифметики, которое можно исчерпать следующими главными темами.

Общая часть.

1. Задачи и содержание методики арифметики.
2. Цель обучения арифметике.
3. Содержание школьного курса арифметики и система арифметических понятий. В частности системы понятий: а) о целом числе и об арифметиче-

ских действиях над целыми числами; б) о дроби и о действиях над дробями; в) об элементах геометрии.

4. Методы обучения арифметике.

5. Организация преподавания арифметики.

Специальная часть.

1. Первый год обучения арифметике.
2. Второй год „ „
3. Третий год „ „
4. Четвертый год „ „

Задачи методики арифметики в советской школе. Советская школа в ряду своих основных задач ставит две важнейшие задачи: „систематическое и прочное усвоение наук“ и „связь теории с практикой“. Эти задачи являются основными и для методики арифметики.

Первая задача расчленяется на ряд частных вопросов, перечисленных в главе о содержании методики арифметики. Вопросы о системе арифметических понятий, о программе курса арифметики, о методах и об организации обучения арифметике, а также частные вопросы методики арифметики — решаются на основе данных математики, психологии и теории познания, и решения их проверяются при помощи педологически-правильно поставленного школьного эксперимента.

Вторая задача — о связи теории с практикой имеет для советской школы особо важное значение. Практическую сторону курса арифметики составляют задачи, содержание которых в СССР заимствуется из нового быта и строительства. Вследствие этого у учащихся воспитываются представления причинной связи между теорией и практикой, которые должны послужить началом образования материалистического мировоззрения. „Если мы достигнем, — говорит Ленин, — нашей цели, если вещь даст тот результат, который от нее ожидали, тогда мы имеем положительные доказательства, что наши восприятия о вещи совпадают с существующей вне нас действительностью“.

Основное отличие советской методики от зарубежной и заключается в том, что первая опирается на диалектико-материалистическую теорию познания и на практику нового быта и социалистического строительства, вторая — на идеалистическую теорию познания и на практику буржуазного общественного и государственного строя. Так, немецкая методика Гизелера и Петри начинается словами: „Арифметика есть звено в цепи учебных предметов, которое должно в своей части содействовать достижению цели воспитывающего обучения — образованию религиозно-этического характера“.

В отличие от этого идеалистического понимания задач методики арифметики, у нас во вводной записке к программе арифметики НКП говорится: „изучение математики должно быть так поставлено, чтобы число и мера служили в руках детей орудием для познания окружающей действительности, для осмысливания дела социалистического строительства, средством для лучшего участия детей в общественной работе и для подготовки их к обороне страны“.

Методика арифметики, как наука. Математика, как наука и как учебный предмет существует и преподается детям, юношам и взрослым в течение многих столетий. Но методика начального обучения арифметике стала создаваться только в XIX ст. До этого времени каждый преподаватель изобретал собственные методы, переоткрывая заново и такие методы, которые уже были изобретены другими. Если преподаватель обладал педагогической проницательностью и достаточным математическим образованием, то преподавание у него шло удовлетворительно. В противном случае и чаще всего — методы преподавания были негодные, и результаты получались слабые. В XIX столетии, главным образом в Германии, а затем и в России, явился ряд выдающихся исследователей, создавших стройное учение о методах преподавания начальной арифметики, которое подняло практику преподавания этого предмета на значительную высоту. Однако этому учению многого еще не хватало, чтобы стать наукой. Творцы этого учения руководились, главным образом, усмотрением, основанным на их богатых наблюдениях, отчасти же общими педагогическими принципами. Им не хватало еще научного эксперимента, научной проверки: усмотрение, хотя бы и обогащенное наблюдениями, недостаточно, чтобы создать науку. В XX ст. исследователи, главным образом в Америке, начинают прибегать к научному эксперименту, который уже дал некоторые результаты.[1] Какое же можно сделать предсказание относительно будущего методики арифметики, как науки?

Образование науки обусловлено тремя факторами: потребностью в ней, наличностью содержания и метода научного исследования. Есть ли потребность в особой науке — методике арифметики? Можно ли говорить о ее содержании? Существуют ли у нее методы исследования?

В любой момент суток в разных точках земной поверхности протекают в среднем 200 000 уроков математики. Столько же преподавателей разной одаренности и опытности обучают в этот момент математике около 6 миллионов детей и юношей. Из этих преподавателей большинство со средней одаренностью и средней педагогической квалификацией, многие из них начинающие, мало опытные.

[1] The National Council of Teachers of Mathematics. 2-nd Yearbook, стр. 73. Новое в американской методике арифметики, ред. Г. Б. Поляка, 1932, стр. 5.

Если бы не существовало никаких методических руководств, то эти преподаватели вынуждены были бы изобретать на свой риск и страх, по своему разумению собственные свои методы. Получались бы неудовлетворительные результаты их работы, от чего страдали бы дети, школа и государство. Наоборот, если бы существовала методика, научно-обоснованная и поэтому более или менее общезначимая, то преподавателю пришлось бы еще много работать, чтобы приобрести опыт, но он в своей практике исходил бы из твердо установленных научных основ и не должен был бы повторять неверные пути, уже испробованные другими. Так же точно молодой врач вооружается в своей врачебной практике опытом, отправляясь от теоретических познаний, усвоенных им в школе и из книг. Все эти соображения приводят нас к выводу, что *потребность в науке о методах обучения арифметике существует*.

Ответим на другой вопрос: существует ли содержание методики арифметики. Содержание ее составляют, с одной стороны, выбор, обоснование и систематизация арифметических понятий, подлежащих изучению, с другой — методы и организация преподавания математики. В первой части методика арифметики опирается на данные математики, во второй — на теорию познания и психологию. Но ни одна из названных наук не занимается вопросами преподавания арифметики: эти вопросы и должны составлять *содержание особой специальной науки*.

Остается еще ответить на вопрос о методах научного исследования преподавания арифметики. Методика арифметики распадается на множество тем, и каждая тема должна подвергнуться сперва теоретической обработке на основе математической теории, теории познания, психологии и педологии. Это — дедуктивный метод исследования. Выработанная теория подлежит опытному педологическому испытанию в школе: это — индуктивный метод исследования. В итоге этих исследований вырабатывается научная теория.

Но возможна ли наука о преподавании математики? Все явления жизни и деятельности человека доступны научному исследованию, а потому возможна наука о преподавании любого предмета.

Итак, методика арифметики обладает *методами научного исследования*. Научная работа над вопросами обучения арифметике уже ведется и сейчас, она будет продолжаться и обогащаться, в результате чего создастся — в этом нельзя сомневаться — наука о методах обучения арифметике.

ЦЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Образовательная цель. Ближайшая цель обучения арифметике в начальной школе состоит в том, чтобы научить детей называть и записывать целые числа, сознательно производить над целыми числами четыре основные арифметические действия, выполнять некоторые действия над простейшими и над десятичными дробями, применять арифметические действия к решению задач. Эти элементы арифметических знаний представляют собой *систему* понятий, находящихся между собою в причинной и генетической связи: понятия сложения образуются на основе числового ряда; понятия умножения вытекают из сложения; понятия вычитания и деления, как действий обратных сложению и умножению, берут свое начало от этих действий.

В процессе производства действий возникают представления об их *законах*, которые в начальной школе остаются еще не высказанными, не облеченными в форму точной арифметической речи, но все же существуют в сознании учащихся и применяются ими при вычислениях, в особенности устных. Система арифметических понятий ученика представляет собой зачатки научного мышления, отличного от привычного ему обыденного мышления. Поэтому изучение арифметики является верным средством для развития мышления, надежным путем к умственной культуре.[1]

Разовьем эту мысль подробнее и конкретнее. Начальная арифметика дает материал для *индуктивного* и *дедуктивного* мышления, так как общие суждения в ней, образуясь из частных конкретных примеров, становятся затем основой для других частных суждений. Так, решая ряд примеров и задач, относящихся к делению, учащиеся усваивают понятия о делении, как о действии, обратном умножению (индуктивный процесс). Этим понятием они пользуются при делении. Например, деля 375 на 75, они подбирают частное путем умножения (дедуктивный процесс).

Занятия арифметикой дают поводы для развития способности *обобщения* и *отвлечения*. Так, дети, оперируя с предметами счета и с конкретными числами, различают два вида деления, как две обособленные операции. Затем постепенно эти операции объединяются в одно отвлеченное и общее понятие деления, обобщающее оба вида деления.

При надлежащем методе обучения арифметике у учащихся вырабатывается сознание связи между понятиями: арифметических действий с нумерацией и с другими основными понятиями, действий над дробями с представлением дроби и т. д.

Ребенок, поступающий в начальную школу, не обладает еще умением передавать ход своих мыслей и нередко принимает результат своего суждения за точку его отправления. Одному ученику была предложена задача:

От 7 *м* ленты отрезали 1 *м*, остаток разрезали на два равные куска. Какой длины каждый кусок?

---

[1] Dr. W. Lietzmann. — Methodik des mathematischen Unterrichts.1926. T. 1 (стр. 52).

Когда его спросили, как он будет решать задачу, он ответил, что он прибавит 3 *м* к 3 *м* и еще 1 *м*.

Этот ребенок принял результат суждения за его начало.

В течение четырех лет дети успевают перерешать множество примеров и задач возрастающей сложности. Объясняя решения этих задач и примеров, они, с одной стороны, усваивают ряд технических слов и оборотов речи, а с другой, учатся наблюдать за своими собственными мыслями, приводить их в правильную последовательность и более или менее правильно выражать их. Всякая неправильность в мышлении или неточность в речи легко обнаруживается и исправляется, и таким образом занятия арифметикой развивают способность *последовательного мышления* и *точной речи*.[1]

Кроме числовых понятий, дети приобретают в начальной школе некоторые геометрические понятия, относящиеся к простейшим геометрическим фигурам.

Итак, изучая арифметику, дети овладевают элементарными знаниями числовых и геометрических отношений и, кроме того, приобретают зачатки математического мышления.

Возникает вопрос, оказывает ли влияние развитие математического мышления на общее умственное развитие ребенка. На этот вопрос можно ответить условно утвердительно: если арифметика преподается так, что она находится в постоянной связи с жизнью и с другими областями знания, то общее умственное развитие несомненно выигрывает от развития математического мышления, которое в этом смысле является предпосылкой для развития общего научного мышления.

Практическая цель. Изучение теории в курсе арифметики все время сочетается с практикой: — решение задач, заимствованных из жизни, из других учебных предметов, из практики социалистического строительства, проведения расчетов, связанных с трудовой деятельностью ребенка в школе, и вообще решение каких бы то ни было задач, служащих для развития и закрепления теоретического курса арифметики.

Учащиеся, оканчивающие начальную школу, должны быть вооружены твердыми вычислительными навыками в области целых чисел и умением производить простейшие операции с дробями. Они должны обладать навыками в решении сложных, но незамысловатых задач.

Выше была высказана мысль, что математическое мышление содействует общему развитию учащихся, если они пользуются им для решения задач, заимствованных из практики быта и социалистического строительства и из других учебных предметов. Эти задачи служат верным средством познания действи-

---

[1] Сравни: Пиаже, — Речь и мышление ребенка, гл. IV, 1932 г.

тельности. Чтобы проникнуться этой мыслью, достаточно прочесть любую задачу из современных задачников и представить себе процесс решения ее.

Два грузовых автомобиля при перевозке зерна израсходовали вместе 6 *кг* 300 *г* бензина. Какое расстояние прошли автомобили, если на 1 *км* пути один из них расходует 170 *г* бензина, а другой на 80 *г* больше?

Для решения этой задачи надо представить себе два автомобиля, расходующие указанное количество бензина; надо представить себе, что расстояние они прошли одинаковое, а бензину один из них израсходовал больше, а другой меньше и т. д. Все эти представления должны быть ярки, отчетливы, в противном случае задача не может быть решена. Задача отображает часть жизни, которую учащиеся познают в количественной и качественной форме. Разнообразные задачи знакомят их с действительностью в ее многообразии. Ряд задач в наших задачниках отражают технику и производство. Если они подобраны планомерно — так, чтобы учащиеся, решая их, могли знакомиться с главнейшими этапами производства — добыванием и подвозом сырья, источником энергии и выпуском фабриката, с преимуществами машинного труда перед ручным и т. д., то такие задачи будут служить одним из средств политехнического образования.

Образовательную и практическую цели обучения математике мы отделили одну от другой ради удобства их описания. В действительности к обеим этим целям ведет единый процесс обучения, который ясно выражен словами Ленина: „от живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике“.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АРИФМЕТИКИ В ШКОЛЕ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ.

Система арифметических понятий. Как бы ни был прост и элементарен курс арифметики, преподаваемый детям, он должен представлять собой систему связанных между собой понятий (стр. 7).

Система арифметических понятий, изучаемых в школе первой ступени, может быть представлена в виде трех групп понятий: 1. понятия о целом числе и об основных действиях над целыми числами; 2. первоначальные понятия о дробном числе и об основных действиях над дробями; 3. понятия о простейших геометрических фигурах, об измерении и системе мер, о действиях над составными именованными числами. Соответственно этим трем группам понятий учащийся должен приобрести за 4 года обучения:

1. Твердые знания и навыки в производстве четырех арифметических действий над целыми числами.

2. Первоначальные сведения об обыкновенных и десятичных дробях.

3. Элементарные сведения из области наглядной геометрии, измерительные навыки, твердое знание системы мер, особенно метрической, и четырех действий над составными именованными числами.

Ступенчатость (концентричность) курса арифметики. Арифметические понятия образуются и формируются постепенно и длительно. Процесс их образования неотделим от процесса усвоения вычислительных приемов и приобретения вычислительных навыков.

Для пояснения этой мысли сделаем беглый обзор образования понятий действия сложения.

Складывая числа, сумма которых не превышает десятка, дети научаются соединять присчитываемые единицы в группы.

$$3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 = 7.$$

Складывая позднее однозначные числа, сумма которых превышает десяток, снова прибегают к группировке единиц второго слагаемого.

$$7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 13.$$

Складывая на втором году двузначные числа, учащиеся группируют единицы обоих слагаемых сообразно с десятичным составом чисел:

$$27 + 15 = (20 + 7) + (10 + 5) = (20 + 10) + (7 + 5) = 30 + (10 + 2) = 42.$$

На третьем году, при сложении многозначных чисел, складывают соответствующие их разряды.

$$3274 + 675 = (3000 + 200 + 70 + 4) + (600 + 70 + 5) = 3000 + (200 + 600) + \\ + (70 + 70) + (4 + 5) = 3000 + 800 + (100 + 40) + 9 = 3000 + (800 + 100) + \\ + 40 + 9 = 3949.$$

Завершаются приобретенные таким образом учащимися понятия уже на пятом и на шестом году обучения, где законы арифметических действий выражаются при помощи правил или буквенных тождеств.

Из приведенного здесь примера мы усматриваем, что основные понятия действия сложения вырабатываются в течение ряда лет и непременно в связи с вычислительными приемами сложения, по мере расширения числовых областей.

Чтобы достичь постепенного формирования понятий и усвоения вычислительных приемов, надо начальный курс арифметики расположить по ступеням.

Ступени эти называют иногда концентрами. Перечислим здесь ступени курса целых чисел, оправданные и практикой и теоретическими соображениями.

Первая ступень — счет, цифры, сложение и вычитание в пределах десятка.

Вторая ступень — нумерация и арифметические действия в пределах двух десятков.

Третья ступень — нумерация и арифметические действия в пределах сотни.

Четвертая ступень — нумерация и действия в пределах тысячи.

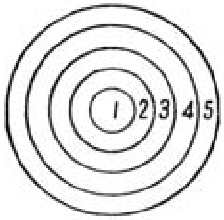
Пятая ступень — нумерация и арифметические действия над числами любой величины.

В пользу ступенчатого построения курса арифметики приводят обыкновенно следующие доводы:

На каждой ступени обучения понятия имеют ту степень отвлеченности и общности, которая соответствует умственному развитию учащихся.

Каждая следующая ступень, давая учащимся новые знания, охватывает вместе с этим все предыдущие ступени. Поэтому ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно и вполне им овладевает.

На чертеже представлена геометрическая иллюстрация ступеней или концентров.



Черт. 1.

Анализ программы арифметики НКП. Изложим общие основания программы арифметики НКП.

1. В программах НКП все содержание арифметики распределяется по годам и по четвертям. Каждый год этой программы включает все три группы понятий, о которых было сказано выше (стр. 9), т. е. Арифметику целых чисел, дробей и измерения. Каждая четверть включает арифметику целых чисел и измерения.

2. Каждый год начинается повторением пройденного в предыдущем году и заканчивается повторением пройденного в истекшем году.

3. Центральное место на всех годах обучения занимает арифметика целых чисел.

4. Преобладающее место и значение имеют вычисления. Устные вычисления проводятся настойчиво через все четыре года. В первые два года вычисления производятся только устно. На третьем и четвертом году изучаются письменные механизмы арифметических действий.

5. Система арифметических понятий и вычислительных приемов развертывается в строгой последовательности по ступеням: каждая новая ступень основывается на хорошо проработанных и твердо усвоенных предшествующих ступенях, каждое новое понятие вырастает из предыдущих понятий.

6. Арифметика целых чисел располагается по годам следующим образом:

Главное содержание курса п е р в о г о г о д а составляют концентры первого и второго десятка.

Кроме них в программу включены простейшие случаи сложения и вычитания в пределах сотни. В этом году дети вполне овладевают таблицами сложения и вычитания, начинают изучение таблиц умножения и деления и знакомство с понятиями четырех арифметических действий.

На втором году главное содержание курса составляет концентр первой сотни. Кроме того к этому году отнесены простейшие случаи устных действий в пределе тысячи. На втором году дети усваивают вполне понятия и таблицы арифметических действий и овладевают основными устными приемами вычисления.

На третьем году вырабатываются письменные механизмы арифметических действий в пределах миллиона, при этом большое внимание обращается на аккуратные и изящные записи.

На четвертом году навыки в производстве письменных действий над числами любой величины укрепляются, понятия об арифметических действиях углубляются и оформляются; изучаются определения арифметических действий и соотношения между прямыми и обратными арифметическими действиями.

7. Арифметика дробей располагается по годам таким образом:

На втором году дети знакомятся с половиной, четвертью и восьмой. Из долей составляются дроби. Этот процесс образования дробей делает возможным переход к сложению и вычитанию дробей, составленных из равных долей единицы.

На третьем году расширяется понятие сложения и вычитания простейших дробей: дети изучают случай сложения и вычитания простейших дробей, когда знаменатель одной дроби есть число кратное других знаменателей.

На четвертом году проходят сокращенный курс десятичных дробей, исключая умножение и деление дробей, и весьма сокращенный курс обыкновенных простейших дробей, исключая умножение и деление этих дробей.

8. Элементы геометрии и измерение распадаются по годам так:

На первом году дети усваивают образы прямой и кривой линии, фигуры — прямоугольник, треугольник, круг, и тела — куб, брусок и шар; учатся измерять метром; получают первые представления о килограмме и литре.

На втором году область измерения расширяется: дети знакомятся с километром, с мерами времени и с мерами веса.

Измерения производят не только в классе, но и на местности.

На третьем году меры, изученные в предыдущих годах, приводятся в систему и дополняются мерами площади. Содержание измерительных работ составляет главным образом измерение площадей прямоугольных фигур.

На четвертом году — область измерения расширяется знакомством с измерением объема прямоугольного параллелепипеда и с кубическими мерами.

В этом году дети производят измерения на местности, вычерчивают планы и измеряют площади многоугольных участков земли с прямыми углами.

9. В процессе измерения дети получают осязательные представления о мерах, приобретают понятия о составном именованном числе и навыки в действиях над этими числами.

СИСТЕМА И РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

НУМЕРАЦИЯ.

Цель нумерации. Ряд целых чисел неограничен, а тех чисел, которые употребительны в жизни и в науке, весьма много, и если бы каждое число требовало особого названия и особого знака, человек оказался бы бессильным, чтобы удержать их в своей памяти.

Нумерация есть учение о способах названия и письменного обозначения целых чисел с помощью немногих слов и немногих знаков. Обыкновенно различают устную и письменную нумерацию. Устная нумерация есть учение о названии чисел с помощью немногих слов; письменная нумерация есть учение о записи чисел при помощи немногих знаков.

Устная нумерация. Средством, сокращающим число слов, необходимых для названия чисел, служит группировка единиц в множества: единицы множества соединяют в группы, которые получают особые названия. Каждое из чисел до известного предела имеет особое название. В современной нумерации первые десять чисел называются каждое особым именем. Для названия чисел, больших десяти, единицы множества соединяют в десятки, и десятки считают до десяти десятков так же, как считаются простые единицы. А именно: десяток (десять), два десятка (двадцать), три десятка (тридцать), четыре десятка (сорок) и т. д.

Благодаря этому для названия всех чисел, начиная от одиннадцати (один и десять) до девяносто девяти (девятьдесять и девять) иных слов, кроме первых десяти, не требуется.

Совокупность единиц, заключающихся в 10 десятках, получает особое название — сто, сотня. Для названия чисел, бóльших сотни, единицы множеств соединяют в сотни, которые считают от одной до десяти сотен так же, как простые единицы. Благодаря этому для названий всех чисел, начиная от ста и до девятисот девяноста девяти, новых слов, кроме слова „сто“ не требуется.

Множество единиц в 10 сотен получает особое название — тысяча. Для названия чисел, бóльших тысячи, их единицы соединяют в тысячи, которые считают до 10 тысяч так же, как и простые единицы. Благодаря этому новых слов, кроме тысячи, в известных пределах счета не требуется.

Если бы мы продолжали тот же путь в выборе названий для новых групп единиц, то мы должны были бы назвать особым словом 10 тысяч и 10 десятков тысяч. В древне-русском языке такие слова существовали: десяток тысяч назывался „тьма“, и десяток десятков тысяч — „легион“. Тогда требовалось для названия всех чисел до миллиона четырнадцать слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (десяток), сто (сотня), тысяча, тьма, легион.

Для дальнейшего сокращения слов, служащих для названия чисел, условимся счет тысяч производить от одной до девятисот девяноста девяти тысяч так же, как мы считали единицы от единицы до девятисот девяноста девяти. Тогда особых названий „тьмы“ для десятка тысяч и „легиона“ для десяти десятков тысяч не потребуется. Назовем число, заключающее тысячу тысяч единиц, словом миллион и будем миллионы считать от одного до девятисот девяноста девяти миллионов так же, как и единицы от одной до девятисот девяноста девяти единиц. Тогда для названия всех целых чисел до миллиарда (включительно) потребуется всего четырнадцать слов.

Такая экономия в числительных именах достигнута благодаря *группировке единиц*, из которых составляются числа. *Группы единиц*, из которых мы составляли множества, были двоякого рода — *десятичные* и *тысячные*:

а) десяток, сотня, тысяча, десяток тысяч и т. д.

б) тысяча, миллион, миллиард и т. д.

Простые единицы составляют первый разряд числа и называются единицами первого разряда.

Десятки — второй разряд и называются единицами второго разряда.

Сотни — третий разряд и называются единицами третьего разряда и т. д.

Единицы — от одной до девятисот девяноста девяти — называются единицами первого класса. Тысячи составляют второй класс и называются единицами второго класса и т. д.

Обобщим основные правила устной нумерации, приняв для простоты речи за основание нумерации число десять.

1. *Отношение единиц двух смежных разрядов, именно высшей единицы к низшей, постоянно* и равно основанию, т. е. десяти.

2. *Отношение единиц двух смежных классов постоянно* и равно в нашей нумерации тысяче.

3. Все числа от единицы до десяти имеют особые названия. Особые названия получает группа — десять десятков, а также все классовые единицы — тысяча, миллион, миллиард и т. д.

4. Числа составляются с помощью сложения и умножения. Например, число семьдесят тысяч триста пятьдесят семь может быть представлено в виде суммы:

$$7 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Итак, цель устной нумерации — название чисел при помощи немногих слов — достигнута при помощи двоякой группировки единиц множества. В современной нумерации отношение единиц двух смежных разрядов равно десяти и двух смежных классов — одной тысяче. Вообще же говоря, эти отношения могли бы быть иными, чем в нашей нумерации.

Письменная нумерация. Запись числа основывается на его составе. Поэтому перед тем, как записать число, его разбивают на классы, а каждый класс — на разряды. Первый, второй и третий разряды первого класса записывают на первом, втором и третьем месте, считая от правой руки к левой. Первый, второй и третий разряды второго класса записывают на четвертом, пятом и шестом месте и т. д. Число пишут, начиная с высших классов. Например, надо записать число, в котором тридцать четыре миллиона, триста тысяч, семьсот двадцать шесть единиц.

Записываем сперва тридцать четыре: 4 на первом месте справа, а 3 на втором. Затем — 300; два нуля написаны, чтобы цифра 3 занимала третье место. Наконец, 725. Получим: 34 300 725.

В этой записи все разряды заняли надлежащие места: 5 единиц — первое место, 2 десятка — второе, 7 сотен — третье, 3 сотни тысяч — шестое и т. д.

Современная письменная нумерация основана на поместном принципе, который можно сформулировать так:

Одна и та же цифра может изображать число единиц любого разряда, потому что ее место зависит от того, единицы какого разряда она изображает. Нуль пишется на месте того разряда, которого недостает в числе; таким образом нуль служит для того, чтобы определить места цифр, стоящих слева от него.

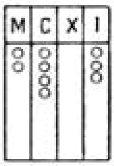
Историческая справка о нумерации. У древних народов были различные основания нумерации. Вавилоняне имели две системы нумерации с основаниями 10 и 60. Некоторую роль играет число 20 в нумерации финикиян и древних французов. Слово дюжина указывает на существование зачатков двенадцатеричной нумерации (12 суставов на четырех пальцах руки). Преобладающее распространение получила у всех народов десятичная нумерация (10 пальцев на руках).

Образование числительных имен зависело от особенностей языка: слова одиннадцать, двенадцать и т. д. образовались в результате соединения слов один на десять, два на десять и т. д. Слова двадцать, тридцать — два десять, три десять и т. д. Двести — два ста. Сорок — сорочёк, древнерусское слово, обозначавшее мешок, в который накладывали определенное число соболиных шкурок. Существующие объяснения происхождения слова девяносто малоубедительны, поэтому мы их не приводим.

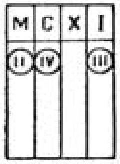
По отношению к письменной нумерации мы будем различать системы нумерации, основанные на поместном принципе, и системы, на этом принципе не основанные.

Поместным принципом пользовались греки и римляне при обозначении числа на особом приборе, называемом абаком. Однако у этих же народов в письменной нумерации поместный принцип не играл никакой роли.

Абак — доска с желобками, в которые клали камешки. На рисунке изображены схемы двух абаков с жетонами; на абаках изображено число 2403.



Черт. 2.



Черт. 3.

Греки изображали разрядные числа с помощью букв:

$$\beta = 2\,000,\ \upsilon = 400,\ \gamma = 3.$$

Числовое значение этих букв не зависело от их места. Число 2403 изображалось в римской нумерации MMCDIII, в греческой — $\beta\upsilon\gamma$.

Наши предки — древние славяне — заимствовали нумерацию от греков.

Нумерацией, основанной на поместном принципе, пользовались сумерийцы (3000 до н. э.) и вавилоняне, а позднее—индусы, греки и европейцы. Важное значение в нумерации имеет знак, который должен замещать отсутствующие единицы разряда, т. е. в современной нумерации 0. Уже вавилоняне имели такой знак раньше индусов. Запись, содержащая нуль в виде кружка, относится к 738 году н. э., но другие знаки, играющие роль нуля, были известны гораздо раньше. В Европе до X в. употреблялись исключительно римские цифры. В этом веке проникли в Европу система нумерации и цифры арабов, но вычисления производились на абаке. Изображения чисел на абаке и система нумерации арабов имели в основе один и тот же поместный принцип; поэтому в Европе новая нумерация быстро привилась.

Системы нумерации, не основанные на поместном принципе, были непригодны для письменных вычислений. Поэтому у тех народов, которые ими пользовались, не могли образоваться письменные методы вычисления. Наоборот, нумерация, основанная на поместном принципе, т. е. нумерация, в которой единицы каждого разряда числа изображаются одними и теми же знаками, служит удобной основой для развития письменных действий.

Лаплас (1749–1827), великий математик и астроном, сказал: „Мысль — обозначать числа с помощью десяти знаков, основываясь на абсолютном и местном значении цифр, так проста, что только по этой причине мы забываем, какого она достойна удивления.

...На сколько было трудно изобретение системы индусов, можно судить по тому, что ее не могли изобрести ни Архимед, ни Аполлоний Пергейский, принадлежавшие к числу величайших умов древности“.

Образование числовых понятий у детей до их поступления в школу. Вопрос об образовании числовых понятий у детей решается двумя теориями. Одна из них может быть названа теорией восприятия групп, другая — теорией счета. Согласно первой теории, *теории восприятия групп*, числовые понятия у детей возникают вследствие многократного созерцания групп предметов, задолго до того времени, как дети начинают сознательно считать. В раннем детстве каждое числовое понятие у детей связано с групповым образом: ребенок понимает, что такое три яблока, три тарелки, три стула, но он не имеет еще отвлеченного, отделенного от предметных представлений понятия о числе три: понятие числа у него еще не отделяется от образа группы предметов, который в этом случае носит название заместителя понятия числа. Заместителем числового понятия у малолетних является образ группы. В дальнейшем, как это будет видно, заместительная функция понятия перейдет от группы предметов к слову или к цифре.

Чтобы возникновение представления о группе предметов было возможно, группа предметов должна быть доступной непосредственному восприятию, т. е. должна быть такой, чтобы ребенок был в состоянии воспринять ее одним взглядом или прикосновением руки и затем мог представить зараз и всю группу в целом и каждый предмет ее в отдельности. Такое восприятие возможно только тогда, когда число предметов группы весьма ограничено. Если предметы расположены подряд, то группа доступна непосредственному восприятию только тогда, когда число предметов в ней не больше 4. Если предметы соединены в какие-либо подгруппы, как, например, очки игральной карты, то вся группа становится более доступной для восприятия.

Детям чаще всего приходится созерцать предметы, расположенные в ряд или без особого порядка. Такая группа доступна непосредственному восприятию, когда предметов не более 4. Поэтому у детей возникают прежде всего понятия о первых четырех числах. Процесс образования этих понятий заканчивается обычно до четырехлетнего возраста, после чего в этом процессе наступает перерыв; и если ребенка не обучают счету, то этот перерыв продолжается довольно долго, до поступления в школу.

Итак, согласно теории непосредственного восприятия, первые числовые понятия возникают на основе многократного созерцания групп, помимо счета: каждое числовое понятие сопровождается образом группы.[1]

Теория счета противоположна теории восприятия групп. Для счета необходимо иметь числовой или натуральный ряд, например, ряд слов, произносимых в постоянной последовательности. Считая предметы какой-либо совокупности, мы сопоставляем их с членами числового ряда. Считая, например, яблоки, мы говорим: „одно“ яблоко, и в то же время указываем на первое яблоко, далее говорим „два“, в то время как указываем на следующее яблоко, и т. д. Говоря, что на тарелке „семь“ яблок, мы этим хотим сказать, что, сопоставляя группу яблок с членами числового ряда, мы остановились на слове „семь“.

Таким образом, при счете мы заменяем одно множество другим, хорошо нам известным.

Образование числовых понятий, согласно теории счета, у детей совершается так. Ребенок воспринимает группу предметов не зараз, а переходя последовательно от одного предмета к другому. Научившись произносить слова — один, два, три и т. д., ребенок научается затем относить к каждому предмету данной группы эти слова последовательно одно за другим. Так образуются понятия о числах, как об элементах натурального или числового ряда. Каждое числовое понятие связано с образом того или другого ряда и, вероятнее всего, с образом звуков, следующих друг за другом в определенной последовательности.[2]

Итак, согласно теории непосредственного восприятия, первые числовые понятия у детей возникают помимо счета, только лишь благодаря созерцанию групп. По теории счета числовые понятия образуются в процессе счета, и групповые образы особого значения для возникновения у детей числовых понятий не имеют. По первой теории образы чисел у детей имеют групповой характер, по второй теории — числа представляются в виде членов числового ряда, т. е. в виде последовательного ряда звуков или каких-либо движений.

Которая из этих теорий права? Дети очень рано приобретают способность распознавать отдельные предметы в группе и их удерживать в своем воображении, но не скоро научаются сознательно считать.

Между тем, числовые понятия у них возникают довольно рано. Поэтому

[1] Эта теория в Германии находит немало сторонников. Лай говорит: „На первой ступени развития счет является производным от числа, а не наоборот“. Руководство к первоначальному обучению арифметике, перев. с немецк., Москва, 1906 г.

[2] Об образовании числовых понятий: Эрн. — Очерки по методике арифметики. Мейман говорит, что числовые представления „развиваются на основе пересчитывания предметов“.

вероятнее всего, что у малолетних детей первые числовые понятия образуются согласно с первой теорией.[1]

Когда образовались понятия о первых четырех числах, то наступает на некоторое время перерыв в образовании числовых понятий.

Это происходит потому, что восприятие групп, заключающих более четырех предметов, затруднительно; образование же дальнейших числовых понятий путем счета преждевременно, так как для малолетних счет — более трудный умственный процесс, чем восприятие групп. Перерыв тянется несколько лет, после чего процесс образования числовых понятий продолжается, но уже путем счета.

Для старших детей этот способ образования числовых понятий более экономен, чем первый, так как счет им дается легко, усвоение же групповых образов, когда группа заключает более четырех предметов, утомительно для воображения и обременительно для памяти. Но и в этот второй период детства, когда образуются понятия о числах 5—10, одновременное восприятие группы впечатлений, привычное для раннего детского возраста, в особенности для детей с ярко выраженным зрительным типом памяти, продолжает, вероятно, существовать наряду с сосчитыванием.[2]

Образование понятий о целом числе в школе. Понятия целого числа образуются у учащихся в связи с изучением нумерации и арифметических действий над целыми числами.

В течение *первого года* дети усваивают счет до 10 и цифры, понятие о десятичном составе чисел второго десятка и сотни, счет и запись чисел до 20 и до 100. Устные вычисления укрепляют эти понятия и обогащают память детей знанием состава числа в разнообразной группировке его единиц.

На *втором году* учащиеся изучают образование тысячи, состав чисел первой тысячи, счет до 1000. Записывая трехзначные числа в пределах тысячи, учащиеся получают первые сведения о поместном принципе (которые в следующих годах будут расширяться и оформляться).

На *третьем году* усваиваются: понятия о тысяче, десятке тысяч и сотне тысяч, как о счетных единицах; понятие о составе чисел, названия и последовательность чисел до миллиона; письменная нумерация и понятие поместного ее принципа.

На *четвертом году* изучаются: образование миллиона и миллиарда; понятие о соотношении между разрядными и классовыми единицами; состав чисел из разрядов и классов, название и последовательность их, письменная нумерация чисел любой величины.

---

[1] К. Ф. Лебединцев говорит в книге „Развитие числовых представлений у ребенка в раннем детстве“: „Понятие о первых числах, до 5 включительно, ребенок приобретает без посредства сосчитывания“.

[2] К. Ф. Лебединцев. — Введение в современную методику математики, стр. 60—61.